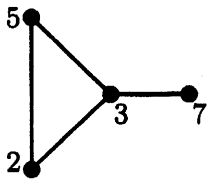
数理解析研究所講究録
第 1593 巻 2008 年 22-24

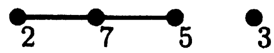
素数グラフの補グラフ

熊本大学大学院自然科学研究科 村上 寛 (Hiroshi Murakami)

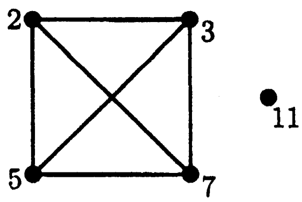
講演の内容は飯寄信保 (山口大学) との共同研究である. G を有限群とし, $\pi(G)$ を G の位数を割る素数全体の集合とする. G の素数グラフ (prime graph) とは, 頂点集合を $\pi(G)$ とし, 2 頂点 p, q に対し G に位数 pq の元が存在するときに p と q を辺で結んだグラフのことをいう. G の素数グラフを $\Gamma(G)$ で表す. $\Gamma(G)$ の補グラフを G の補素数グラフ (complementary prime graph) と定義し $\Gamma^c(G)$ で表す. グラフ Γ の連結成分の個数を $n(\Gamma)$ で表す. 補素数グラフについて調べようと思った動機は「可換なものよりも, 非可換なもののほうが重要ではないか?」という問題意識からである. 記号は標準的なものを使用する ([2]).

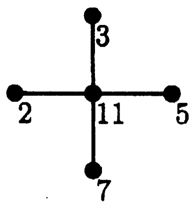
例. 交代群 A_{10} に対して $\Gamma(A_{10})$, $\Gamma^c(A_{10})$ はそれぞれ





となり $n(\Gamma(A_{10})) = 1$, $n(\Gamma^c(A_{10})) = 2$ である. また交代群 A_{12} に対して $\Gamma(A_{12})$, $\Gamma^c(A_{12})$ はそれぞれ





となり $n(\Gamma(A_{12})) = 2$, $n(\Gamma^c(A_{12})) = 1$ である.

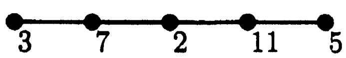
補素数グラフについて以下の基本性質が成り立つ.

(1) $n(\Gamma(G)) \leq 6$ である ([3], [4], [8]). 一方 $n(\Gamma^c(G))$ には上限がない. 可解群の例では素数位数の巡回群の直積を考えることで分かる. また交代群においても, 任意の自然数 m に対して $n(\Gamma^c(A_n)) > m$ となるような n が存在する.

(2) $\Gamma(G)$ の直径は 5 以下である ([5]). 一方 $\Gamma^c(G)$ の直径には上限がない. 例えば Frobenius 群 $7:6$ から巡回群 Z_2 への自然準同型を f_1 とし, Frobenius 群 $11:10$ から巡回群 Z_2 への自然準同型を f_2 とする. ここで Z_2 を同一視して f を

$$f : (7:6) \times (11:10) \longrightarrow Z_2, \quad f(x, y) \overset{\mathrm{def}}{\longmapsto} f_1(x) f_2(y)$$

と定義する. この写像 f は準同型となるが, $\mathrm{Ker}\, f$ の補素数グラフを考えると



となる．他の Frobenius 群を考えて以上の操作を繰り返すことで直径をいくらでも大きくすることができる．

(3) $n(\Gamma(G)) \geq 2$ ならば $n(\Gamma^c(G)) = 1$ となる．これはグラフ理論の基本性質である．

補素数グラフの基本的な結果として，$n(\Gamma^c(G))$ を分類したのが次の定理である．

定理 1 (飯寄-村上). G を有限単純群とする．もし $\Gamma^c(G)$ が連結でなければ G は交代群 A_n (但し $n, n-1, n-2$ は全て素数ではない) である．

この定理の証明には有限単純群の分類定理を用いている．また飯寄・千吉良・八牧 [1] の結果を使うことで次の系が成り立つ．

系 (飯寄-村上). G を有限群とし，π を $\Gamma(G)$ において 2 と直接繋がる素数全体の集合とする．このとき G の補素数グラフが連結ならば以下のいずれかが成り立つ:

(1) G は可解群,

(2) G に正規列 $G \supseteq N \supseteq M \supseteq 1$ が存在して，G/N と M は可解な π 群，N/M は交代群 A_n (但し $n, n-1, n-2$ は全て素数ではない) を除く非可換単純群．

G を可解群とすると $\Gamma^c(G)$ は三角形を含まない．そこで「$\Gamma^c(G)$ が三角形を含まない群は可解群となるか?」という問いが考えられる．これについて以下の結果を得た．

定理 2 (飯寄-村上). G を非可換な有限単純群とする．このとき $\Gamma^c(G)$ が三角形を含まない群は以下に限る:

A_9, A_{10}, A_{12}, J_2,
$L_3(q)$, q は Mersenne prime で，もし $3 \mid (q-1)$ ならば $9 \mid (q-1)$,
$U_3(q)$, q は Fermat prime で，もし $3 \mid (q+1)$ ならば $9 \mid (q+1)$,
$U_3(9)$, $S_6(2)$, $O_8^+(2)$, ${}^3D_4(2)$.

証明の概略を述べる．$n(\Gamma(G)) \geq 3$ の場合はグラフ理論の基本性質より $\Gamma^c(G)$ は三角形を含む．$n(\Gamma(G)) = 2$ の場合は鈴木 [7] より $\Gamma(G)$ の 2 を含まない連結成分は complete graph となるので，2 を含む連結成分が complete graph であれば $\Gamma^c(G)$ は三角形を含まない．Lucido-Moghaddamfar が $\Gamma(G)$ の 2 を含む連結成分が complete graph となる有限単純群を分類している ([6])．しかしこの結果には少し誤りがあり，それを修正したものが定理 2 で挙げた群である．$n(\Gamma(G)) = 1$ の場合は有限単純群の分類定理を用いて $\Gamma^c(G)$ は三角形を含むことを示した．

参考文献

[1] N. Chigira, N. Iiyori, and H. Yamaki, *Non-abelian Sylow subgroups of finite groups of even order*, Invent. Math. **139** (2000), 525–539.

[2] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, and R. A. Parker, *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[3] N. Iiyori and H. Yamaki, *Prime graph components of the simple groups of Lie type over the fields of even characteristic*, J. Algebra **155** (1993), 335–343, Corrigenda, **181**(1996) 659.

[4] A. S. Kondrat'ev, *Prime graph components of finite simple groups*, Math. USSR Sbornik **67** (1990), 235–247.

[5] M. S. Lucido, *The diameter of the prime graph of a finite group*, J. Group Theory (1999), no. 2, 157–172.

[6] M. S. Lucido and A. R. Moghaddamfar, *Groups with complete prime graph connected components*, J. Group Theory (2004), no. 7, 373–384.

[7] M. Suzuki, *On the prime graph of a finite simple group - an application of the method of Feit-Thompson-Bender-Glauberman*, In *Groups and Combinatorics - in memory of Michio Suzuki*, Adv. Stud. Pure Math. 32, Mathematical Society of Japan, 2001, pp. 41–207.

[8] J. Williams, *Prime graph components of finite groups*, J. Algebra **69** (1981), 487–513.